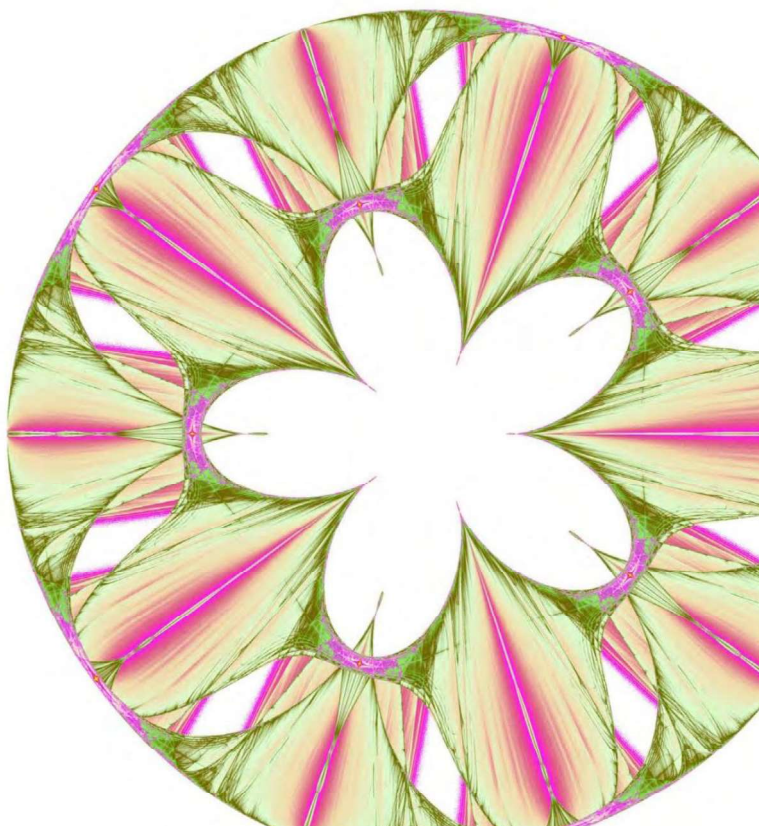
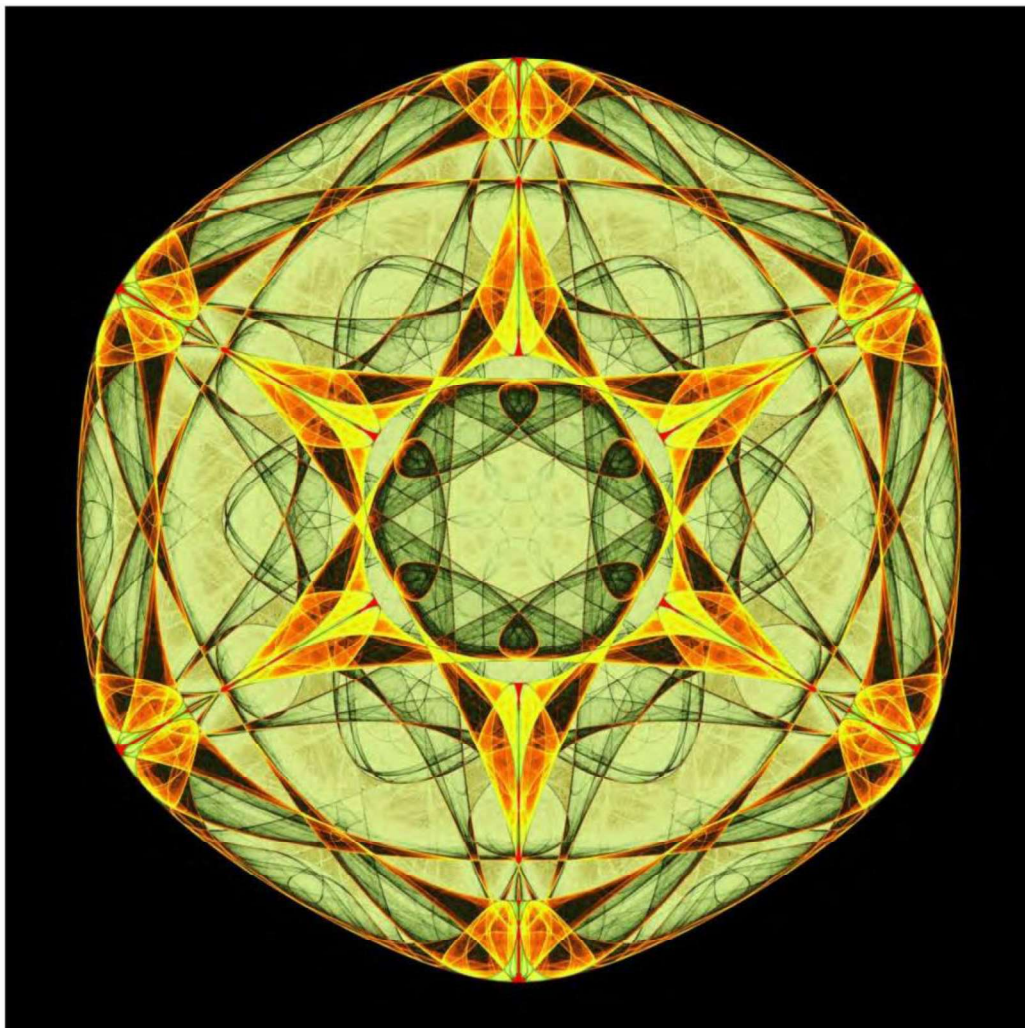


فصل اول

مقدمه ای بر تقارن و آشوب





شکل ۱,۱ هالوین.

تصاویری که در شکل‌های ۱,۱ و ۱,۲ نشان داده شده است با استفاده از یک رایانه ایجاد شده و تصویری از ایده‌های ریاضی است که شامل تقارن و آشوب است. تصاویر توسط یک هنرمند ایجاد نشده است. در عوض حساسیت‌های هنری و قضاوت‌های زیباشناسی تا حدی با فرمول دقیق ریاضی مطابقت دارند. ما در این تصاویر می‌بینیم که امکان استفاده از ریاضیات و کامپیوتر وجود دارد.

برای ایجاد اشکال و طرح های اصلی، اغلب از پیچیدگی های بزرگ و جزئیات دقیق، که گاهی اوقات مشابه الگوهای مشاهده شده در طبیعت و یا ایجاد شده توسط انسان است. هدف ما این است که توضیح دهیم که چگونه این تصاویر شکل گرفته و ارتباط آنها با مفاهیم مؤثر ریاضیات قرن بیستم چیست. ما از این فرصت استفاده می کنیم تا نشان دهیم که با دیدگاه های این ایده ها چگونه می توان تنوع فوق العاده ای از هندسه، بافت و سبک را دید. تصاویر ما از تلفیق تقارن و آشوب ایجاد شده است. در نگاه اول، این وضوح به عنوان یک تناقض به نظر می رسد. برای درک این نکته، ما با بررسی این دو ایده جالب از ریاضیات شروع می کنیم.

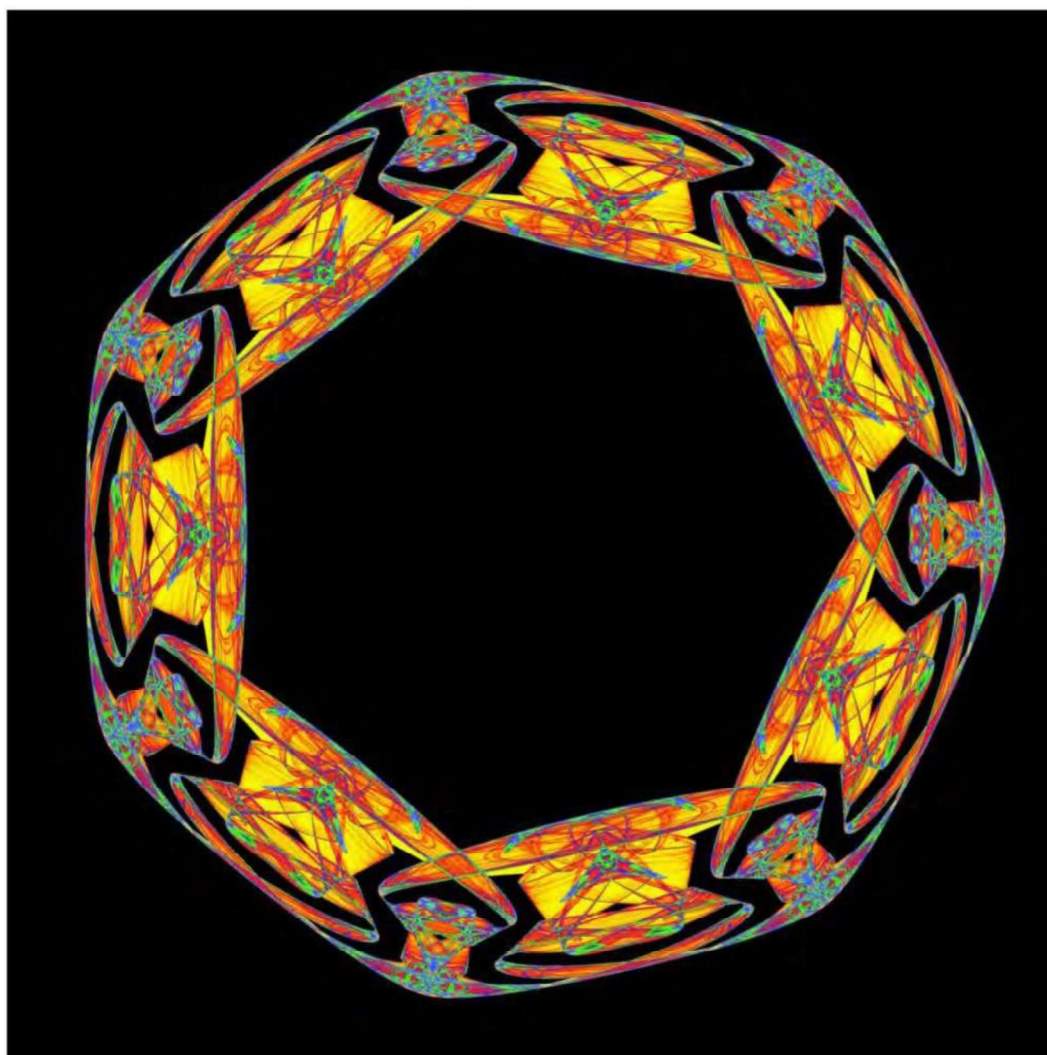
تقارن

ما با یک تعریف تقارن (به صورت نقل قول از دیکشنری آمریکایی heritage) شروع میکنیم: تقارن عبارت است از تطابق و تناظر دقیق فرم و پیکربندی در دو سمت از یک خط یا صفحه یا یک مرکز و حور.

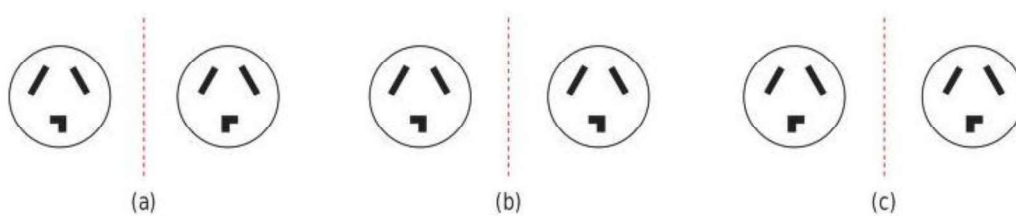
در خواندن اول ممکن است به نظر برسد که واژه نامه ها خیلی مبهم هستند. با این حال، تقارن یک مفهوم بسیار اساسی است، مانند یکپارچگی، و بدیهی است که چگونه چنین ایده هایی را می توان توضیح داد. تعریف فرهنگ لغت نشان می دهد که شکل های مسطح ممکن است به دو روش مختلف متقارن باشند: در بازتاب بر روی یک خط تقسیم یا در چرخش حول یک نقطه. یک نوع سوم از تقارن مسطح وجود دارد، که ما بعداً بحث خواهیم کرد، اما در حال حاضر بر دو مورد اول تمرکز داریم.

سه الگو را در شکل ۱،۳ مشاهده کنید. الگوی اول (a) یک خط تقارن وجود دارد، در حالی که الگوهای (b) و (c) آن را ندارند. به سادگی، یک شیء مسطح را به صورت متقارن در نظر میگیرند، اگر بتوان آن را در امتداد یک خط برید و به دو قطعه یکسان تقسیم کرد. با این حال، این تعریف خیلی دقیق نیست. الگوها (b) و (c) متقارن نیستند، اما وقتی قطعات را روی هم می گذاریم یکسان هستند. از سوی دیگر، الگوی (a) متقارن است، اما زمانی که ما از بخش نقطه چین برش می زنیم قطعات متفاوت هستند.

شاید ساده ترین راه برای توضیح تقارن، پیروی از رویکرد عملیاتی است که توسط ریاضیدانان استفاده می شود: عدم تقارن حرکت است. به این صورت که فرض کنید شما یک شی داشته باشید و آن را انتخاب کنید، آن را در اطراف حرکت دهید و آن را تنظیم کنید. اگر غیرممکن باشد که بین شیء در موقعیت های اولیه و نهایی خود تمایز قائل شویم، می گوئیم که تقارن دارد. فرض کنید شما الگوی را در شکل ۱،۳ (a) انتخاب کرده و آن را نیم دور در سه بعد اطراف خط چین (یعنی خارج از خط) بچرخانید. خواهید دید همان الگوی مشابه قبل و بعد از چرخش ظاهر می شود. اما این موضوع در مورد الگوی (b) درست نیست.



شکل ۱,۲ دستبند مایان.



شکل ۱,۳ تعریف تقارن

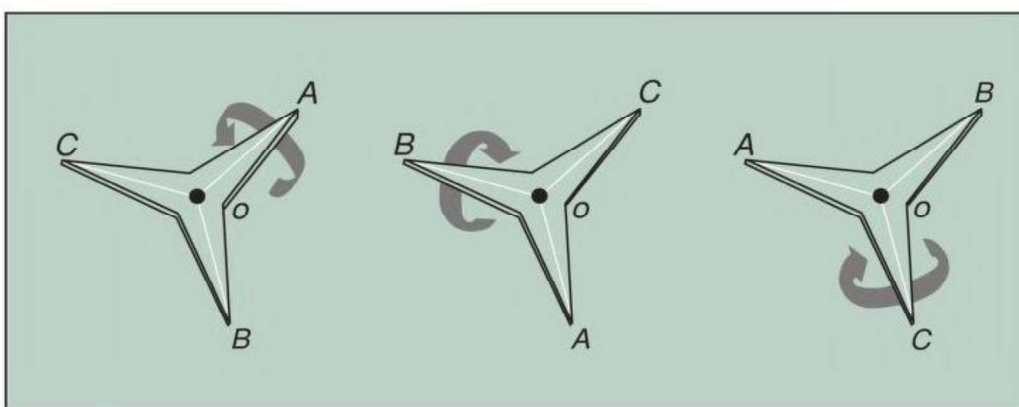
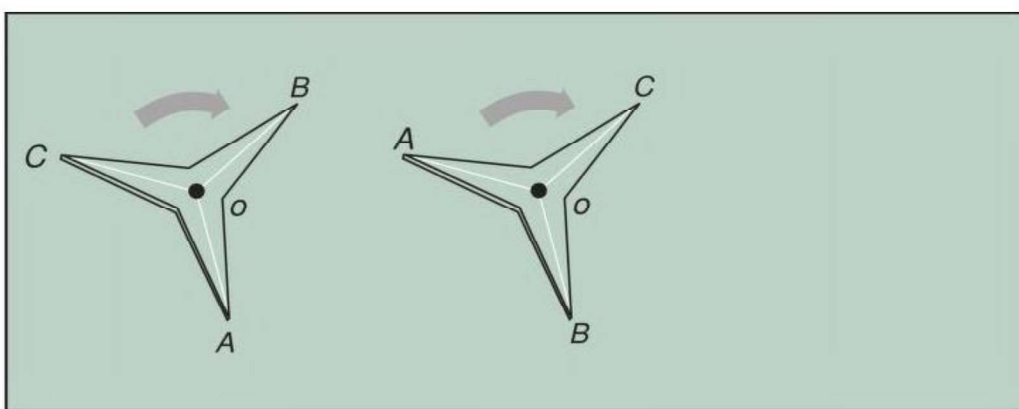
به این ترتیب با تفکر تقارنی، می بینیم که هر شی یک حداقل تقارن بدیهی را با برداشتن آن و قرار دادن آن در موقعیت اصلی خود به دست می آورد. اگر چه، در نگاه اول، ممکن است به نظر عجیب و غریب باشد که بگوییم همه چیز حداقل یک تقارن دارد، اما این قرارداد واقعا مفید است. ما باید تقارن ستاره سه پر که در شکل ۱،۴ نشان داده شده است را پیدا کنیم. ما نقاط ستاره A ، B ، C را برای کمک به بحث ها برچسب گذاری کرده ایم.

اگر ستاره را در جهت عقربه ی ساعت به اندازه یک سوم دور در محور مرکز O بچرخانیم، ما آن را به موقعیتی تبدیل می کنیم که از موقعیت اصلی آن هندسه قابل تشخیص نیست. با این حال، نقطه A به جایی که نقطه C است، نقطه C به جایی که نقطه B است، و نقطه B به جایی که نقطه A بود (نگاه کنید به شکل ۱،۵ (سمت چپ)) نقل مکان کرد. این حرکت یک تقارن مهم از ستاره است. ما ممکن است این فرایند را تکرار کنیم و ستاره را در جهت عقربه ی ساعت از یک سوم دور دیگر بچرخانیم (یعنی ستاره به میزان دو سوم دور از جهت اولیه چرخانده می شود). ما می بینیم که نقطه A به B ، نقطه B به C ، و نقطه C به A منتقل شده است (نگاه کنید به شکل ۱،۵ (سمت راست)). حال اگر ستاره را یک سوم دور مجددا چرخانیم، آن را به موقعیت اصلی خود بازگردانیم. تا کنون ما سه تقارن پیدا کرده ایم: در نقطه اول، چرخش یک سوم دور، چرخش دو سوم دور. با این حال، این تنها تقارن ستاره نیست. با توجه به شکل ۱،۴، می بینیم که ما می توانیم ستاره را حول خط AO بازتاب دهیم. به این صورت که، ستاره را در طول خط یا محور AO نگه داریم و یک نیم چرخش در فضا ایجاد می کنیم تا مبادله B و C با حفظ A مطابق شکل ۱،۶ (سمت چپ) ایجاد شود. به این ترتیب، ستاره را میچرخانیم و خط AO را ثابت نگه داریم. واضح است دو تقارن بازتابی دیگر ستاره با بازتاب در خطوط BO و CO (شکل ۱،۶ (وسط، راست)) وجود دارد. به نظر می رسد که شش تقارنی که ما پیدا کرده ایم، تقارن ستاره است.

البته، شش تقارن ستاره ای که ما آن را توصیف کرده ایم دقیقا تقارن یک مثلث یک طرفه است و برای بسیاری از اشکال رایج است. به طور خاص، شکل ۱،۷ به طور دقیق دارای تقارن مشابه با ستاره است. از سوی دیگر، شکل ۱،۸ این چنین نیست. در حالی که دارای تقارن چرخشی ستاره است، تقارن انعکاسی ندارد. با این حال ما این شکل را بازتاب می دهیم (از طریق هر خط). توجه داشته باشید که این اشکال با چرخاندن در جهت عقربه های ساعت است. پس از انعکاس، این شکل یک چرخش در جهت عقربه های ساعت دارد.

در ادامه، ما باید با دقت بیشتری در شکلهای با تقارن های مختلف (مثلا تقارن مربع) نگاه کنیم. تقارنهای این نوع یا انواع دیگر از نقاط برجسته در بسیاری از آثار هنری که توسط انسان ایجاد شده است. حتی علامت های موجود در جاده ها نیز دارای برخی از تقارن ها است. در نگاه اول، تقارن به وضوح در طبیعت آشکار نیست. به عنوان مثال، ویژگی های جغرافیایی مانند چشم اندازه ها، رشته کوه ها و اقیانوس ها خیلی متقارن نیستند. ارگان های حیاتی بدن اغلب دارای تقارن تقریبی هستند – معمولا شبیه به تصاویر یک بخش در آینه – اما این ارتباطات به ندرت به صورت کاملا دقیق هستند. یکی از واضح ترین و زیباترین نمونه ها از تقارن در طبیعت، تقارن فوق العاده ی برف ها است (به شکل ۱،۹ نگاه کنید).

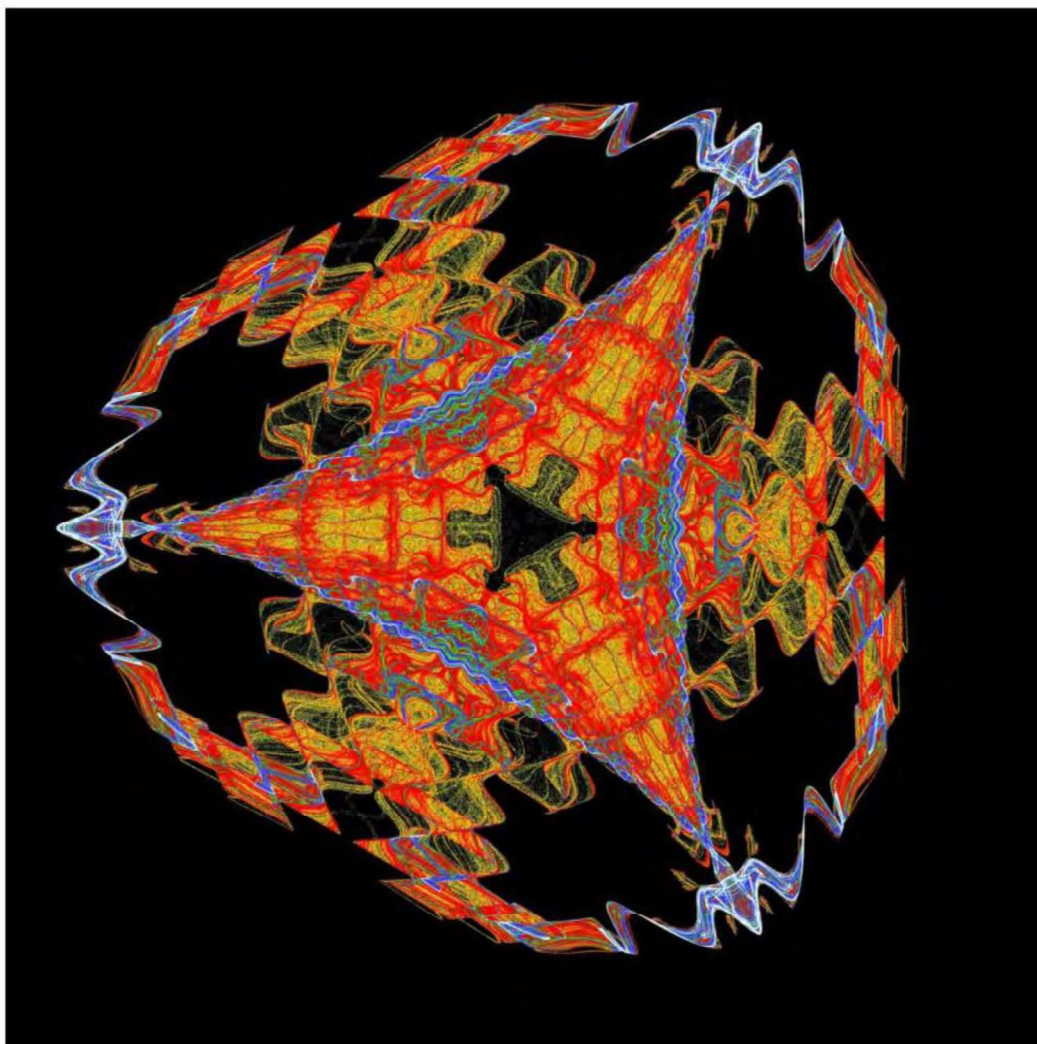
شاید خیلی تعجب نکنید که تقارن در دنیای فیزیکی یافت می شود، زیرا تقارن با قوانین فیزیکی که جهان را اداره می کنند، تطابق دارد. با این حال، در عمل، بسیاری از این تقارن برای ما نامرئی می شود.



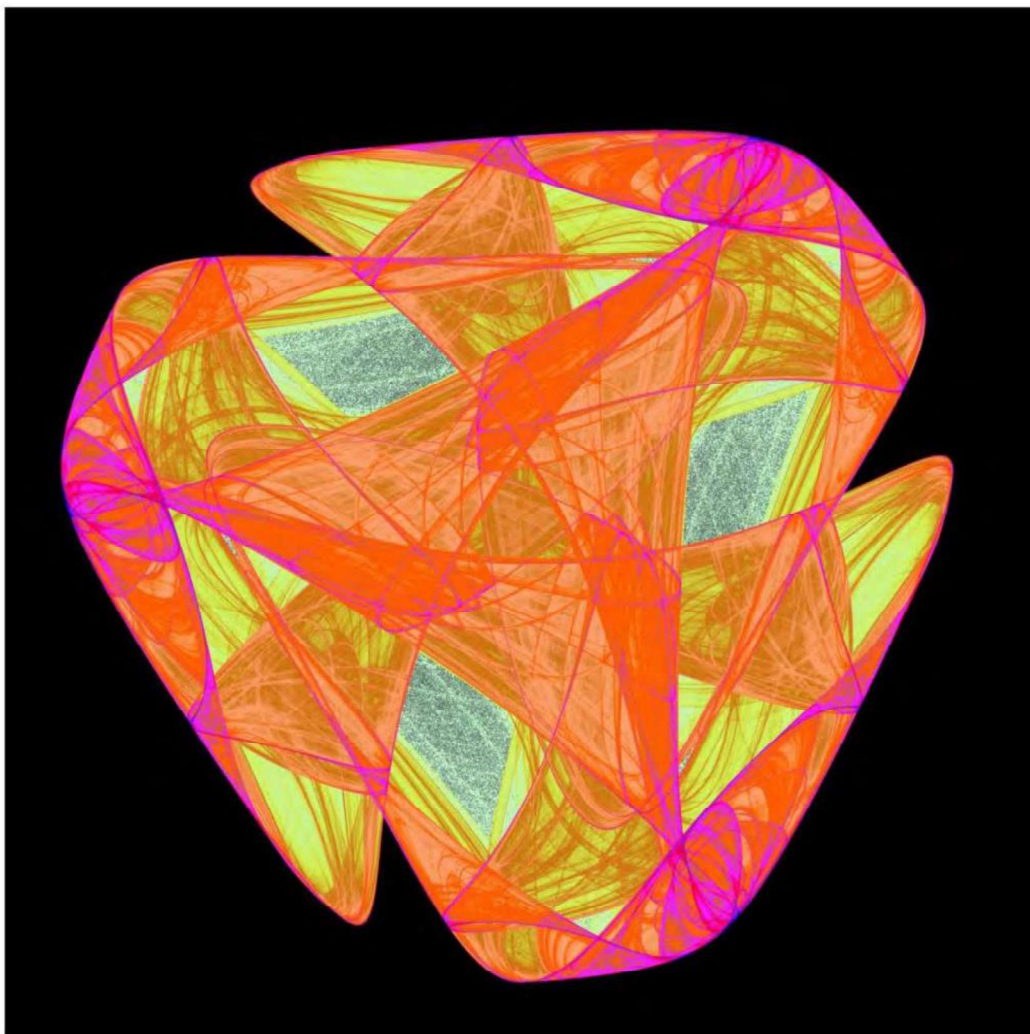
شکل ۱,۴ یک ستاره سه پر

شکل ۱,۵ ستاره سه پر با چرخش ۱۲۰ درجه (چپ) و ۲۴۰ درجه (راست).

شکل ۱,۶ ستاره سه پر منعکس شده در محور AO (چپ)، محور BO (وسط) و محور CO (راست).



شکل ۱,۷ آشوب خود رو.



شکل ۱،۸ صدف سه پر،



شکل ۱,۹ دانه برف با تقارن شش ضلعی،

عکس از Kenneth Libbrecht

آشوب

در ادامه ما چیزی را توصیف می کنیم که در نگاه اول، نقطه مقابل تقارن است: آشوب. باز هم با تعریف آن از فرهنگ لغت شروع می کنیم:

وضعیت اختلال یا سردرگمی کامل. به نظر می رسد که آشوب بدون شکل و ساختار است با این حال از اوایل دهه ۱۹۷۰ میلادی، اصطلاح آشوب به طور فزاینده ای در علم و ریاضی استفاده شده است. اینگونه اظهار می شود که طیف گسترده ای از پدیده های طبیعی، از خورشید تا آب و هوا یا تغییرات میدان مغناطیسی زمین، رفتاری آشوبناک است. از آنجایی که آشوب کلمه ای نشان دهنده فقدان شکل یا ویژگی است، استفاده از این کلمه در زمینه علمی ممکن است گمراه کننده باشد. در واقع، ما تحقیقات علمی را محدود به آن پدیده هایی می کنیم که ساختار یا ویژگی های قابل تعریف دارند. به طور کلی، اگر چیزی در حالت اختلال کامل و فاقد ساختار یا فرم باشد، در مورد آن مطلب زیادی وجود نخواهد داشت.

در این کتاب، ما از آشوب به معنای آن در علم کنونی استفاده می کنیم. به طور کلی، ما آشوب را به صورت غیر قابل پیش بینی و پیچیده بودن معرفی می کنیم. برای ادامه و توصیف دقیق تر ما نیاز به بازگشت به زمان نیوتن و تولد دیدگاه مدرن درباره دینامیک داریم.

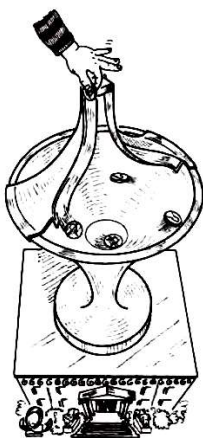
جبر گرایی

نیوتون نه تنها تئوری معروف گرانش و سه قانون حرکت را فرموله کرد، بلکه ریاضیاتی را اختراع کرد که او را قادر ساخت تا آن قوانین را توسعه دهد. به عنوان مثال، او یک مدل دقیق ریاضی برای حرکت سیارات اطراف خورشید ارائه داد. شاید مهمترین ویژگی مدل نیوتون، توانایی آن در پیش بینی درستی از مدارهای آتی این سیارات بود. به عبارت دیگر، اگر ما در هر زمان معین موقعیت و سرعت سیارات را بدانیم، می توانیم نظریه ای را برای موقعیت های سیارات در زمان های بعدی پیش بینی کنیم. بنابراین، مدل نیوتن برای سیستم خورشیدی قطعی است: اگر ما می دانیم موقعیت اولیه و سرعت سیارات چگونه است، حرکت بعدی به طور منحصر به فردی تعیین می شود.

اگر ما به یک مدل غیرمتمرکز نگاه کنیم این نکته واضح تر است. به عنوان مثال، نتیجه چرخش زمین آن است که خورشید همیشه از شرق طلوع می کند. فرض کنید در عوض، مسئله جایی که خورشید طلوع می کند، وابسته به سقوط یک سکه است. به این ترتیب، تصور کنید که هر شب خداوند یک سکه را پرتاب می کند. اگر سکه شیر باشد، خورشید در شرق طلوع می کند، و در صورت خط آمدن، از غرب طلوع کند. این مدل برای طلوع خورشید غیرقطعی است. بنابراین این که امروز خورشید از شرق یا غرب طلوع کرد، هیچ تاثیری بر این که فردا از شرق یا غرب طلوع کند ندارد.

انتظار مشترک از جبرگرایی این است که دانش مستدل از موقعیت فعلی منجر به پیش بینی های مناسب از موقعیت آینده می شود. به عبارت دیگر نتایج داده های مشابه تقریباً یکسان باشد. به عنوان مثال، چاه گرانشی که در شکل ۱،۱۰ نشان داده شده است، یک اسباب بازی است که در سال های اخیر در موزه ها در سراسر آمریکا با هدف انجام دادن یک کار لذت بخش ظاهر شده است. به طور معمول،

وقتی یک سکه توسط یک فرد در امتداد رمپ واقع در بالای چاه قرار می گیرد، عمل می کند. پس از رها کردن سکه، جسم چرخش خود را به پایین شروع می کند و به مرور چرخش سریع تر می شود و برای والدین و فرزندان بسیار لذت بخش است. در پایین این ابزار، سکه به جعبه می افتد. سرعت های مختلف ورود سکه به گوی پایین این ابزار منجر به مسیرهای متفاوتی می شود، اما در نهایت به همان محل چاه می افتد، این امر نشان می دهد شرایط اولیه بر روی مسیر حرکت این سکه تاثیرگذار است.



شکل ۱،۱۰ چاه جانبی.

صفحات رنگی که در شکل های ۱،۱ و ۱،۲ نشان داده شده اند توسط یک مدل قطعی و در این مورد با یک فرمول دقیق ریاضی ایجاد شده است. با این حال، به رغم این جبرگرایی، مدل به روش های مختلفی به شیوه ای غیر قطعی و تصادفی رفتار می کند. که این امر ویژگی سیستم های آشوبناک است: آنها قطعی هستند، اما به گونه ای رفتار می کنند مثل اینکه آنها قطعی نیستند. چگونه می توان این کمبود جبرگرایی را نشان داد؟ پاسخ این است که، در واقع در عمل ما هرگز نمیتوانیم دقیقاً موقعیت یا شرایط اولیه را بدانیم. خطای کوچکی در تعیین موقعیت فعلی ما می تواند بر پیش بینی موقعیت آینده تاثیر بسیاری داشته باشد. حتی اگر ما موقعیت دقیق فعلی خود را دقیقاً بدانیم، وقتی ما موقعیت نهایی را با استفاده از یک رایانه محاسبه کنیم، خطاهای کوچک ناشی از گرد کردن را داریم. در یک سیستم آشوبناک، این خطاها به سرعت افزایش می یابد و پیش بینی های نادرستی را ایجاد می کند. در قرن نوزدهم، اعتقاد به یک جهان قطعی، چنان قوی بود که ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی لاپلاس میگویند:

چنین اطلاعاتی در همان فرمول حرکات بزرگترین اجسام جهان و کسانی که سبکترین اتم را در بر می گیرند، در نظر گرفته می شود. برای آن، هیچ چیز غیرممکن نیست و آینده، همانند گذشته، آنرا با چشمان خود خواهد دید.

توسعه تئوری کوانتومی در آغاز قرن بیستم نشان داد که در سطح اتمی، کمبود اساسی در قوانین قطعی وجود دارد. اخیراً معلوم شده است که حتی اگر اثر کوانتومی را نادیده بگیریم، دیدگاه خوشبینانه

لاپلاس که آینده و گذشته را براساس اطلاعات کافی در مورد حال حاضر پیش بینی می کند اساسا ناقص است. یک مشکل عملی وجود دارد. حتی کوچکترین خطا در اطلاعات ما می تواند در طول زمان افزایش یابد تا نتیجه ای کاملا متفاوت از آنچه ما با استفاده از داده های واقعی بدست آوریم حاصل شود.

حساسیت به شرایط اولیه

حساسیت به شرایط اولیه که مشخصه دینامیک آشوب است می تواند پیامدهای مهمی برای زندگی روزمره داشته باشد. در واقع، در بررسی آب و هوا ما می دانیم که درجه حرارت با توجه به فصل و بارش و تابش آفتاب به صورت متناوبی افزایش و کاهش می یابد. اما، به دلایل مختلف، ما می خواهیم دانش دقیقتری داشته باشیم. آیا بعد از ظهر پنج شنبه باران خواهد بارید؟، چه مقدار برف در یکشنبه خواهد آمد؟ و دمای هوا در روز سه شنبه به چه میزانی خواهد بود؟ سوالات معمولی هستند. پاسخ به این سوالات به شدت به داشتن دانش دقیق از شرایط آب و هوایی فعلی بستگی دارد، که به لحاظ پیچیدگی چنین اطلاعاتی به معنای واقعی کلمه ناممکن است.

فرض کنید سیستم آب و هوا آشوبناک است، که بسیاری از دانشمندان نیز بر آن معتقدند. پیش بینی های دقیق و دقیق دراز مدت آب و هوا غیرممکن است. حساسیت به داده های اولیه پیش بینی دقیق آب و هوای پنج یا شش روز آینده را غیرممکن می کند.

یکی از ویژگی های قابل توجه آب و هوا، پیچیدگی آن است، و این یک ویژگی مشخص از دینامیک آشوب است. پیچیدگی قطعا یک ویژگی از تصاویر رنگی است که در این کتاب نشان داده شده است. در بررسی دقیق، می بینیم که هر تصویر ساختار پیچیده ای دارد. این پیچیدگی و ساختار به ما می گوید که تصاویر شامل اطلاعات است. مشکل در مثال هایی همانند آب و هوا، چگونگی استفاده و تفسیر این اطلاعات است. برخلاف اعتقاد معمول، عدم قطعیت اغلب با مقدار داده های موجود نسبت مستقیم دارد. علاوه بر این، پاسخ ما به پدیده های پیچیده اغلب مشکلات دیگری را نیز در بر دارد.

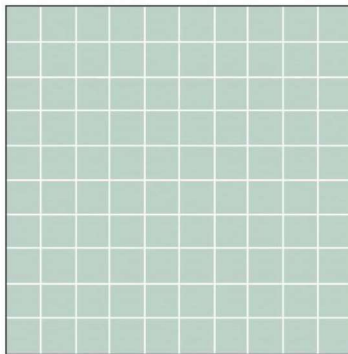
اطلاعات مربوط به اقتصاد مثال خوبی است. هر روز رسانه ها با فراوانی داده های اطلاعاتی در مورد بازار سهام، نرخ بیکاری (محلی و ملی)، تولید ناخالص داخلی، تجارت خارجی، تورم، مالیات، بهره وری کارکنان، اقدامات بانکی و غیره ما را بمباران می کنند. برای اکثریت ما، تأثیر این توده داده ها این است که ما حتی کمتر در مورد آنچه که به طور واقعی در اقتصاد اتفاق می افتد، بدانیم. ما در تلاش برای کنترل کوه داده ها و نخبگان ما به دنبال شاخص های ساده هستند که جهت اقتصاد را پیش بینی می کنند. به طور خلاصه، راه حل ما برای این عدم قطعیت اغلب آن است که تمام استدلال ها و پیش بینی ها را فقط بر اساس یک یا دو ویژگی عرضه پول یا تورم انجام دهیم. اگر چه این رویکرد را نمی توان از نظر علمی معتبر دانست، اما این امر لازمه ی ایجاد انعطاف پذیری است.

مجددا لازم است تا استدلال کنیم که ما تعریف دقیق بین تعریف فرهنگ لغتی از آشوب و معنایی که از این اصطلاح در اینجا استفاده می کنیم، ترسیم می کنیم. تعریف فرهنگ لغتی آشوب نشان می دهد که در آشوب هیچ اطلاعاتی وجود ندارد: یعنی هیچ فرم و ساختاری ندارد. برای ما، آشوب ممکن است پیچیده باشد و به نظر می رسد غیر متقارن است، اما در درون آن اطلاعات پنهان فراوانی موجود است.

قوانین

قبل از توضیح اینکه چرا تصاویر ما نشان دهنده دینامیک آشوب است، می بایست مختصراً در مورد نحوه ایجاد عکس ها صحبت کنیم. کامپیوترها واقعا موجودات سرسختی هستند. یک شوخی قدیمی در مورد معلمی که به همکار خود شکایت می کند و می گوید که: "دانش آموز من فوق العاده احمق است؛ من به او تمام چیزی را که می دانستم آموختم و او هنوز چیزی نمی داند". کامپیوترها دقیقاً مثل این هستند. کسی که برنامه ریزی کرده، می داند که این جعبه سیاه دقیقاً همان چیزی که گفته می شود و نه چیزی بیشتر و نه کمتر را انجام می دهد. برای ایجاد تصاویر مانند آنهایی که در اینجا هستید، باید دقیقاً به کامپیوتر بگویید چه کاری باید انجام دهد و اشتباهات خود را در طول مسیر اصلاح کنید.

چگونه باید به کامپیوتر بگوییم که چه کاری انجام دهد؟ اساساً، هر قسمت از نور بر روی صفحه نمایش یک پیکسل نامیده می شود، و یک مانیتور مدرن با وضوح بالا به طور معمول در حدود دو میلیون پیکسل، که هر کدام ممکن است به صورت یک مربع ۰.۲ میلی متری در سراسر صفحه نمایش باشد (یا حدود ۱۰۰ عدد در هر اینچ) دارد. از آنجا که پیکسل ها خیلی کوچک هستند، اغلب به راحتی آنها را به عنوان نماینده نقاط روی صفحه نمایش می بینند. در شکل ۱،۱۱، ما نشان می دهیم که چگونه پیکسل ها بر روی یک صفحه نمایش مانیتور با ۱۰۰ پیکسل در یک شبکه ۱۰×۱۰ مرتب شده اند.



شکل ۱،۱۱، پیکسل ۱۰×۱۰

روشی که برای تهیه تصاویر به رایانه می گوئیم با استفاده از فرمول های ریاضی است. این فرمول ها تصاویر ترسیم شده را تعیین می کنند. یک فرمول متقارن می تواند یک تصویر متقارن ایجاد کند. به طور خلاصه، فرمول ها ضوابطی را برای قوانین حسابی ارائه می دهند، و این قوانین حسابی روش مکانیکی برای انتخاب نقاط در صفحه یا پیکسل ها روی صفحه رایانه را برای ما فراهم می کند.

کلمه قانون چندین معنا دارد که معروف ترین آن محدودیت است. به عنوان نمونه، در بسیاری از خانه ها یک قاعده اساسی را در نظر میگیرند: هیچ پایی روی میلمان نباشد. (به این معنا، قوانین معمولاً ناعادلانه هستند.) با این وجود، نوع قانونی که در ذهن داریم مجموعه ای از دستورالعمل ها است. به عنوان مثال، قانون ما برای خوابیدن این است: برو به طبقه بالا، حمام کنید، مسواک بزنید، مطالعه کنید،

چراغ‌ها را خاموش کنید، به رختخواب بروید و بخوابید. این قانون کاملاً پیچیده است و برای یادگیری این موضوع حداقل دوازده سال تمرین مداوم نیاز دارد.

قانون رفتن به تخت خواب از یک نظر کاملاً ساده است. پس از استناد، فقط یک نتیجه مجاز (خواب) وجود دارد. قوانین حسابی پیچیده تر هستند: پاسخ‌ها به ورودی بستگی دارد. یک ماشین حساب با یک دکمه ریشه دوم نمونه خوبی از یک قانون حسابی را ارائه می‌دهد. قانون این است: یک عدد را وارد کنید و دکمه ریشه دوم را فشار دهید. اگر ۴ را وارد کنیم ۲ بیرون می‌آید. اگر ۲ را وارد کنیم، ۱٫۴۱۴۲۱۳۵ (یا بسته به ماشین حساب) خواهد بود. البته، ما فقط می‌توانیم بارها و بارها با فشار دادن دکمه ریشه دوم، قانون ریشه دوم را اعمال کنیم. وقتی این کار را انجام می‌دهیم، ما فقط محاسبه ریشه دوم محاسبه قبلی را داریم. در واقع، این تکرار در نهایت منجر به این می‌شود که ماشین حساب شماره ۱ را نمایش دهد (مگر اینکه با عددی کمتر از ۱ یا برابر با صفر شروع کنید). از این پس ما از کلمه قانون فقط به معنای یکی از این قوانین ریاضی استفاده خواهیم کرد. به طور خاص، یک قانون همیشه یک ورودی (معمولاً یک عدد) و یک خروجی (به طور معمول یک عدد) خواهد داشت.

یک مثال خوب از یک قانون حساب توسط داستان زیر از فرهنگ عامه ارائه شده است. یک مرد خردمند، با استفاده از شوخ طبعی خود، می‌تواند یک پادشاه هندی (تا حدودی کند و غیرقابل انعطاف) را از ویرانی نجات دهد. در عوض، پادشاه نیمی از پادشاهی خود را به ارزش ۵۰۰٫۰۰۰٫۰۰۰ روپیه ارائه می‌دهد. مرد خردمند زیرکانه و با فروتنی از شاه می‌پرسد: "ای پادشاه محترم، من جز یک مرد فقیر هستم. شاید، در عوض، فقط می‌توانید مربع‌ها را روی یک تخته شطرنج پر کنید، با شروع یک دانه برنج در مربع اول، دو دانه در قسمت دوم، چهار دانه در سوم و غیره.

پادشاه تا مربع دهم، باید ۲۰۴۷ دانه برنج را به خردمند می‌داد. با این حال، تا میدان بیستم، او به ۲۰۹۷۱۵۱ دانه برنج می‌داد. تا آخرین میدان، خردمند حدود ۳۰ کیلومتر مکعب برنج جمع می‌کرد. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم که هر دانه برنج در حدود ۰٫۸ سانتی متر طول دارد، و دانه‌های برنج را پشت سر هم بچینیم، آنها از زمین تا خورشید امتداد می‌یابند و تقریباً ۲۰ برابر تولید سالانه برنج هند در سال ۲۰۰۷ است.

به طور رسمی‌تر، مرد خردمند از پادشاه می‌خواهد که یک دانه برنج را شروع کند و ۶۳ بار این مقدار را دو برابر کند. هرچقدر که شما با یک شماره غیر صفر شروع کنید، این قانون باعث می‌شود که تعداد بزرگتر و بزرگتر شوند. همانطور که مرد خردمند مشاهده کرد، تعداد به سرعت غیرقابل تصویری بسیار زیاد می‌شوند.

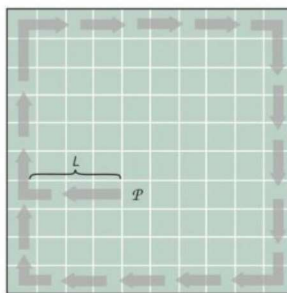
قوانین پیکسل

اگر عمداً پیکسل‌ها را روی صفحه نمایش با نقاط موجود در صفحه به هم بریزیم، آنگاه قوانینی که باعث می‌شوند تصاویر ما مشابه قوانین حسابی باشد که در بالا توضیح دادیم. با این حال، بر خلاف قاعده دو برابر کننده، ما نمی‌خواهیم که قوانین ما در مورد استفاده مکرر بدون مرز رشد کنند (در غیر این صورت، مقادیر از تعداد پیکسل‌های نمایشگر بیشتر می‌شود). ما بر اساس قانون پیکسل به عنوان

یک قاعده فکر می کنیم که پیکسل هایی به عنوان ورودی و پیکسل هایی به عنوان خروجی است. قانون پیکسل ممکن است به فرمول ریاضی پیچیده ای بستگی داشته باشد. برای ایجاد یک عکس سیاه و سفید، فرض می کنیم که صفحه سیاه است. ما یک پیکسل را انتخاب می کنیم و نقطه مربوطه را روی صفحه روشن می کنیم سپس سفید خواهد شد. سپس ما از قانون پیکسل خود استفاده می کنیم، با اولین پیکسل به عنوان ورودی شروع می کنیم و پیکسل جدیدی را که روشن می کنیم بدست می آوریم. سرانجام این قاعده را بارها و بارها تکرار می کنیم تا اینکه تصمیم بگیریم متوقف شود. کل فرایند را تکرار می نامند. در این طرح هیچ دلیلی وجود ندارد که یک پیکسل بیش از یک بار مورد بازدید قرار نگیرد.

به عنوان نمونه ای از یک قانون پیکسل بسیار ساده، یک پیکسل را از صفحه انتخاب کنید، بگویید بالا سمت چپ. ما یک قانون پیکسل را تعریف می کنیم و نیاز داریم که هر پیکسلی را که از صفحه به عنوان ورودی انتخاب می کنیم، همیشه پیکسل سمت چپ را به عنوان خروجی بدست می آوریم. با این وجود بارها و بارها که ما از این قانون استفاده می کنیم، هرگز بیش از دو پیکسل روشن در صفحه را نمی بینیم: پیکسل اولیه و پیکسل بالا سمت چپ.

بعد ما به یک قانون پیکسل کمی پیچیده تر نگاه می کنیم. پس از شکل ۱،۱۱، فرض کنید صفحه نمایش مانیتور ۱۰۰ پیکسل دارد که در یک شبکه ۱۰ در ۱۰ قرار گرفته است. پیکسل P را از صفحه و جهت سمت چپ خود انتخاب کنید. قانون پیکسل دارای دو بخش است: در صورت امکان، یک پیکسل را در مسیری که می خواهید حرکت دهید. و اگر نمی توانید، یک چهارم چرخش را به راست بپیچید. تصویری که از این قانون پیکسل حاصل خواهد شد، توصیف ساده است. یک قطعه اولیه که از نقطه اولیه P به مرز شبکه منتقل می شود و به دنبال آن گردش بدون پایان مرز در جهت عقربه های ساعت انجام می شود (شکل ۱،۱۲ را ببینید).



شکل ۱،۱۲ دینامیک شبکه پیکسل

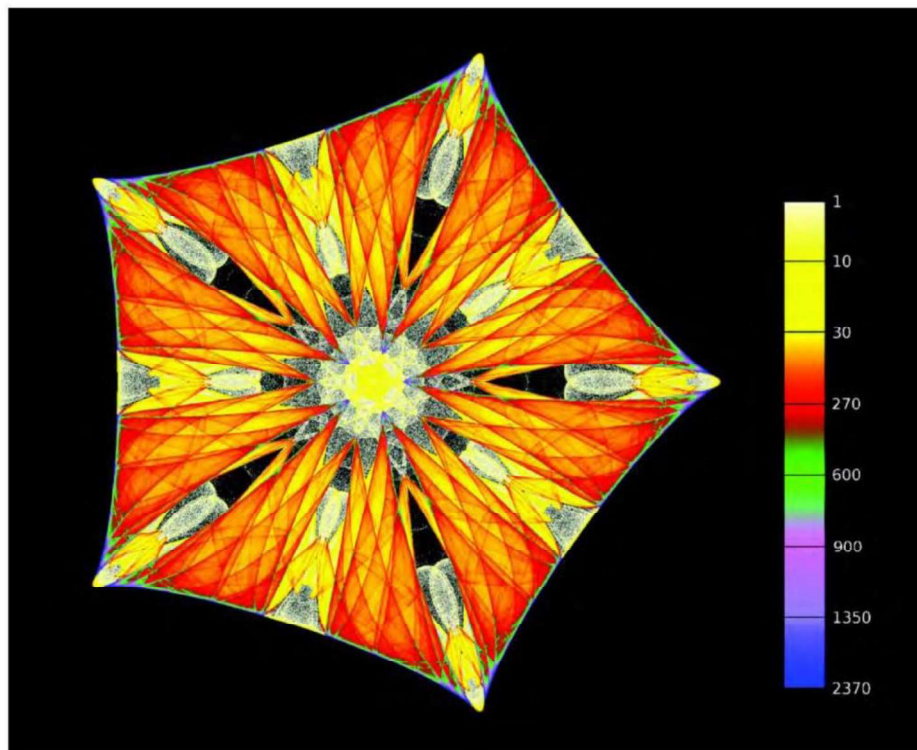
حتی اگر قوانینی که ما در اینجا توضیح دادیم بسیار ساده باشد، اما یکی یا دو ویژگی جالب وجود دارد که می خواهیم با اشاره ی ویژه ای آنها را از هم جدا کنیم. اول از همه، توجه داشته باشید که قسمت اول دنباله پیکسل با رفتار طولانی مدت آن متفاوت است. به طور خاص، پیکسل های موجود در بخش خط اولیه، با برچسب L در شکل ۱،۱۲، هرگز مورد بازبینی قرار نمی گیرند. می گوییم این قسمت از دنباله پیکسل نشان دهنده رفتار اولیه است. ما اغلب از اصطلاح

گذرا برای توصیف رفتار اولیه استفاده می کنیم. رفتار گذرا در ابتدا مشاهده می شود اما در دراز مدت نه. بخشی از دنباله پیکسل که از مرز شروع می شود نشان دهنده رفتار طولانی مدت است. دومین نکته مهم در مورد این مثال این است که رفتار طولانی مدت تکرار تا بی نهایت است. ما به این ویژگی به عنوان تناوب اشاره می کنیم. از آنجا که ۳۶ پیکسل در محیط وجود دارد، این قانون پیکسل هر ۳۶ حرکت یک بار تکرار می شود (با نادیده گرفتن حالت گذر اولیه). در واقع اگر هر قانون پیکسل را به اندازه کافی اعمال کنیم، در نهایت حداقل یک پیکسل مورد بررسی مجدد قرار می گیرد. برای اینکه بدانید چرا چنین است، تصور کنید که ۱۰۰ پیکسل در صفحه نمایش وجود دارد (هر تعداد زیاد به همان اندازه خوب عمل خواهد کرد). پس از ۱۰۰ تکرار، ما ۱۰۱ پیکسل را روشن کرده ایم، بنابراین حداقل یک پیکسل باید دو بار روشن شده باشد. این استدلال نمونه ای از اصل لانه کبوتر است: اگر ۱۰۱ لانه برای ۱۰۰ کبوتر قرار داده شود، حداقل یک کبوتر باید حداقل دارای دو لانه باشد. یک قانون پیکسل، پس از گذر زمان اولیه، ما باید رفتارهای تناوبی را پیدا کنیم. به طور کلی، قوانین تصویر ما منجر به این نوع رفتار ساده تناوبی نمی شود و برای درک این نکته می توان از رنگ استفاده کرد.

رنگ آمیزی با اعداد

اکنون درباره نحوه رنگ آمیزی ارقام خود بیشتر می گوییم. ایده اصلی بسیار ساده است. با تولید فرمول ریاضی برای تولید تصویری مانند شکل ۱،۱۳ شروع کنید. یک نکته اولیه را انتخاب کنید و این قانون را بارها و بارها اعمال کنید، به طور معمول بین ۲۰،۰۰۰،۰۰۰ تا ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰ بار این کار را انجام می دهیم. قسمت گذرا از دنباله پیکسل تولید شده را نادیده بگیرید. (در عمل، ما فقط تعداد پیکسل ها را بعد از ۱۰۰۰ برنامه اول این قانون شمارش می کنیم). تعداد دفعات ضرب در هر پیکسل را ضبط کنید، و پیکسل را مطابق با مقدار آن عدد رنگ کنید. رنگ های واقعی انتخاب می شوند که مطابق آن رنگ ها ساختار زیرین را بهتر نشان می دهند. در شکل ۱،۱۳ نتیجه رنگ آمیزی یک شکل با تقارن پنج برابر پس از ۶۶۷،۰۰۰،۰۰۰ تکرار در یک شبکه ۳۰۰۰ در ۳۰۰۰ پیکسل را نشان می دهیم. از آنجا که ۹،۰۰۰،۰۰۰ پیکسل وجود دارد، با این اصل کبوتر دریایی دنبال می شود که برخی پیکسل ها باید بیش از یک بار ضربه خورده باشند. در عمل، بسیاری از پیکسل ها بیش از یک بار ضربه می خورند، و در گروه رنگی در شکل ۱،۱۳، بسته به تعداد دفعات زده شده، رنگ های اختصاص داده شده به پیکسل ها را نشان می دهیم. همانطور که معمولاً انجام می دهیم، اگر پیکسل زده نشده باشد، پیکسل را سیاه می کند. اگر پیکسل بین ۱ تا ۱۰ بار زده شده باشد، رنگ سفید و سایه دار به رنگ زرد می کنیم. زرد اگر پیکسل بین ۱۱ تا ۳۰ بار زده شده باشد؛ سایه زرد به رنگ قرمز اگر پیکسل بین ۳۱ تا ۲۷۰ بار ضربه خورده باشد،

و در صورتی که پیکسل حداقل ۲۳۷۰ بار ضربه خورده باشد در پایان با آبی به پایان می رسد. (حداکثر تعداد بازدیدها در یک پیکسل ۴۲۵۳۴ بود.)



شکل ۱،۱۳ خرقة ی امپراتور. تقارن پنج ضلعی و نوار رنگی مربوطه.

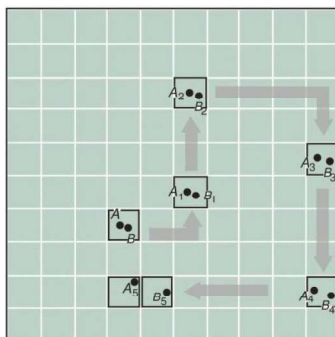
تاکنون پیکسل ها و نقاط را بر روی صفحه نمایش به صورت به هم ریخته گرفته ایم و فرمول ریاضی خود را یک قانون پیکسل می دانیم. با این حال ، هنگامی که تعداد زیادی از برنامه های قاعده خود را بکار می بریم ، واقعاً باید قانون ریاضی را از یک قاعده پیکسل متمایز کنیم. برای دیدن دلیل چنین چیزی ، به یاد بیاورید که یک قانون پیکسل با یک حالت گذرا شروع می شود و سپس به صورت دوره ای رفتار می کند. نتیجه این است که تنها انتخاب معقول رنگ آمیزی برای پیکسل هایی که با استفاده از یک قاعده پیکسل انتخاب شده اند ، یک رنگ برای پیکسل های گذرا است (آنهايي که فقط یک بار بازدید می شوند) و رنگ دیگری برای پیکسل هایی که به طور دوره ای بازدید می شوند. اگر به رنگ های شکل ۱،۱۳ نگاه کنیم ، می بینیم که تصویر نمایانگر فرایندی است که دور از حالت تناوبی است.

قوانین حسابی

برای اینکه بفهمیم چگونه می توانیم با چنین رنگ آمیزی های پیچیده عکسهایی بسازیم ، باید بحث کنیم که چگونه قانون حسابی پنهان ما می تواند به یک قاعده پیکسل مرتبط باشد. در یک قانون حسابی

فرمول وجود دارد که به ما می گوید چگونه می توان نقاط را در صفحه به نقاط دیگری در صفحه منتقل کرد. فرض کنید ما یک مقدار اولیه را انتخاب می کنیم که یک قاعده حسابی اعمال خواهیم کرد. از آنجا که یک پیکسل در واقع یک منطقه مربع کوچک در صفحه نمایش رایانه است، این نقطه در یکی از پیکسل ها قرار دارد. (یک مشکل کوچک در مورد آنچه اتفاق می افتد هنگامی که نقطه در مرز مشترک دو پیکسل است، اما ما این مسئله را نادیده می گیریم.) با وارد کردن قانون حساب، ما یک نقطه جدید در صفحه نمایش می گیریم که درون یک پیکسل قرار دارد. ما این پیکسل را روشن می کنیم. اگر این روند را بارها تکرار کنیم، در نهایت پیکسلی وجود خواهد داشت که دو بار از آن بازدید می شود. همانطور که در بالا توضیح دادیم، اگر ما با یک قانون پیکسل کار می کردیم، به دنبال آن رفتار بعدی دوره ای خواهد بود. با این حال، در تجسم ما از قانون حساب، درک این نکته حائز اهمیت است که، حتی اگر یک پیکسل واحد ممکن است بارها و بارها در طی فرآیند تکرار مورد بازدید قرار گیرد، هیچ نقطه ای در داخل آن پیکسل نباید در طول این فرآیند بیش از یک بار مورد اصابت قرار گیرد.

حتی اگر ما نمی خواهیم قانون حسابی ما مانند یک قانون دو برابر رفتار کند - یعنی نباید امتیازها به طور بی حد و حصر بزرگ شوند و صفحه را ترک کنند، شاید به طور تعجب آور معلوم شود که قوانینی که ما برای تولید تصاویر خود استفاده می کنیم بسیار مشترک است. با قانون دو برابر شدن در شکل ۱،۱۴، دو نقطه A و B را نشان می دهیم که درون یک پیکسل قرار دارند. برای سادگی، فرض می کنیم پیکسل دارای طول لبه برابر با ۰٫۲ میلی متر باشد. فرض کنید فاصله بین A و B یک صدم میلی متر است. اکنون قانون حسابی خود را به کار می گیریم تا نقاط جدید A_1 و B_1 را به ترتیب با A و B پیدا کنیم. از آنجا که A و B به هم نزدیک هستند، انتظار داریم که A_j و B_j در یک پیکسل قرار بگیرند. با این حال، ممکن است فاصله بین A_i و B_i افزایش یابد (شکل ۱،۱۴ را ببینید). برای قوانین حسابی که برای تولید تصاویر ما استفاده می شود، مسافت ها اغلب حداقل با چند برابر افزایش می یابد. به عنوان مثال، فاصله A_1 و B_1 ممکن است حداقل دو برابر مسافت A و B باشد. اکنون این ویژگی از فاصله های دو برابر نگه می دارد به شرط آنکه فاصله بین نقاط خیلی زیاد نباشد (مثلاً بیش از یک دهم قطر صفحه). اگر قاعده حسابی خود را در A و B پنج بار اعمال کنیم، و نقاط A_5 و B_5 را به دست آوریم، بنابراین فاصله بین A_5 و B_5 حداقل ۳۲ (۲ به توان ۵) برابر فاصله بین A و B خواهد بود. نشان می دهد که این فاصله حداقل ۰٫۳۲ میلی متر است و بنابراین A_5 و B_5 اکنون باید در پیکسل های مختلف قرار داشته باشند.



شکل ۱,۱۴ واگرایی نقاط در یک پیکسل در تکرار.

این استدلال نشان می دهد که اگر قانون حسابی ما تمایل به افزایش فاصله بین نقاط نزدیک به هم داشته باشد، نتیجه نهایی حتی تکرارهای نسبتاً محدود (مثلاً ۱۰ یا ۲۰) به نقاط اولیه بستگی دارد. به طور خاص، تکرارهای محاسبه شده و ترسیم شده بر روی صفحه، احتمالاً پس از گذشت چند قدم، با تکرارهای واقعی بسیار متفاوت هستند (تکرارهای محاسبه شده بدون خطای گرد کردن). این امر به این دلیل است که کامپیوتر فقط با دقت تقریبی محاسبه می کند و بنابراین، پس از تنها یک تکرار، نقطه محاسبه قبلاً کمی با مقدار واقعی متفاوت خواهد بود. بعد از چند تکرار دیگر، نقطه محاسبه شده به هیچ وجه در نزدیکی مقدار واقعی نقطه قرار نمی گیرد.

با این حال، همه اطلاعات از بین نمی رود. این یک واقعیت قابل توجه است که اگر تعداد بسیار زیادی از تکرار را انجام دهیم و پیکسل های خود را مطابق با تعداد دفعاتی که هر پیکسل برآورده می شود رنگی کنیم، تصویر نتیجه (با احتمال زیاد) مستقل از نقطه اولیه انتخاب شده است. به عبارت دیگر، حتی اگر محاسبه دقیق یک مسیر فردی ممکن نباشد، ممکن است محاسبه "چیزی" که حاوی اطلاعات جالب است امکان پذیر باشد و به نقاط اولیه وابسته نیست. برای درک همه این موارد، باید دو موضوع را مورد بحث قرار دهیم: جاذب های عجیب و آمار.

جاذب های عجیب

توضیح ساده درباره چگونگی ادغام تقارن و دینامیک برای ایجاد آشوب و ساختار به صورت همان زمان چالش برانگیز است. ریاضیدانان و فیزیکدانان هنوز در تلاشند تا روشهایی را درک کنند که به وسیله آن دینامیک آشوب، الگوهای قابل تکرار و قابل مشاهده را تولید می کند. اگرچه دینامیک آشوب فقط در بیست یا سی سال گذشته کاملاً مشهور شده است، اما این آشنایی محدود باعث شده است تا برخی از درک ها انجام شود و بخش اعظم این درک مبتنی بر تصاویر است.

به طریقی رفتاری که با جذب کنندگان می بینیم برعکس عدم محدودیت در قاعده مضاعف انسان خردمند است. به یاد بیاورید که قانون دو برابر کردن یک عدد می گیرد و آن را دو برابر می کند. اگر با عدد صفر شروع کنیم، نتیجه دوباره صفر است. ما صفر را یک نقطه ثابت برای قانون می نامیم: وقتی ما

قاعده را اعمال می کنیم ثابت یا بدون تغییر است. با این حال ، اگر با یک عدد بسیار ، بسیار کم (به عنوان مثال ، ۰,۰۰۰۰۰۰۰۱) شروع کنیم و قاعده دو برابر کننده را بارها و بارها اعمال کنیم (سی و دو بار بگوییم) ، پس به تعداد نسبتاً زیادی می رسیم (حدود ۴۳). بنابراین ، اگرچه عدد صفر ثابت است ، وقتی تعداد مکرر قانون دو برابر کردن را اعمال می کنیم ، اعداد در نزدیکی از صفر حرکت می کنند. این روند دور شدن از صفر در ابتدا کند است اما در نهایت به سختی پیش می رود. ممکن است عدد صفر را یک نقطه ثابت دافع بنامیم. وقتی قانون را به کار می بریم ، اعداد از صفر دور می شوند.

یک جذب کننده رفتار مخالف را ثبت می کند. همانطور که ما یک قانون را اعمال می کنیم ، به سمت جذب کننده نزدیکتر یا جذب می شویم. به عنوان مثال ، ما ممکن است قانون نصف کردن را در نظر بگیریم ، که عدد می گیرد و آن را نصف می کند. از آنجا که نیمی از صفر هنوز صفر است ، می بینیم که صفر یک نقطه ثابت برای قانون نصف شدن است. با این حال ، بر خلاف قانون دو برابر کردن ، همه اعداد تحت برنامه های مکرر از قانون نیمه به نزدیک به صفر می شوند. در این حالت ما صفر را نقطه ثابت جذب کننده می نامیم: تحت اعمال مکرر قانون نصف ، شماره های مجاور به صفر جذب می شوند.

ویژگی اصلی این نقطه ثابت این است که هر نقطه اولیه که شما انتخاب کنید ، تکرار آن نقطه اولیه را به صفر نزدیکتر می کند. رفتار طولانی مدت فقط از یک نقطه ثابت تشکیل شده است. در یک روش مشابه ، اشیاء هندسی پیچیده تر می توانند جذب شوند. در واقع ، هنگامی که تصاویر خود را می سازیم ، با یک نقطه اولیه شروع می کنیم و تکرار می کنیم و آنچه را که ما معتقدیم گذراست ، دور می ریزیم. چگونه می دانیم که آنها گذرا هستند؟ خب ، اگر با یک نکته اولیه دیگر شروع کنیم و گذرا را دور بیندازیم ، در پایان به همان تصویر خواهیم رسید. کل نقاطی که تصویر را تشکیل می دهند ، جاذب نامیده می شود.

اکنون می توانیم بخشی از دلیل اینکه چرا وقتی برای شروع فرآیند تکرار ، دو نقطه مختلف را انتخاب می کنیم ، به همان عکس می رسیم را درک کنیم . در واقع ، فرض کنید که ما از یک قاعده برای تکرار استفاده می کنیم که دارای جذابیت باشد. مشروط بر اینکه انتخاب نقطه اولیه ما خیلی از جاذب فاصله نداشته باشد ، در می یابیم که تکرارها به جاذب نزدیک می شوند و سپس به نظر می رسد که به صورت آشوبناک روی جاذب می چرخند. ترتیب مورد بازدید ما از نقاط جذب ممکن است به انتخاب نقطه اولیه بستگی داشته باشد. با این حال ، رفتار آشوبناک از تکرار در جاذب باعث می شود تا در نهایت از همه پیکسل هایی که جذب کننده را تشکیل می دهند بازدید کنند. فرض کنید ما از تصویر سیاه و سفید برای نمایش جذابیت و پیکسل های رنگی در هنگام برخورد استفاده می کنیم. اگر قسمت گذرا از تکرار را نادیده بگیریم (جایی که به جذب کننده نزدیک می شویم) ، در نهایت دقیقاً آن پیکسل هایی را که جذب کننده را تشکیل می دهند ، صرف نظر از نقطه اولیه روشن می کنیم.

این بحث بینشی در مورد اینکه چرا همان عکس های سیاه و سفید را به دست می آوریم ، می دهد ، اما چرا در تصاویر همان رنگ را می گیریم؟ برای درک این موضوع ، باید در مورد ویژگیهای آماری جاذب بحث کنیم.

آمار

بگذارید با مروری بر روشی که برای رنگ آمیزی تصاویر استفاده می شود ، شروع کنیم. از تعداد تکرارها استفاده می کنیم ، بپرسید که هر پیکسل در طول روند تکرار چند بار ضربه می خورد و سپس به تعداد عدد رنگ می دهیم. همانطور که قبلاً اشاره کردیم ، هر پیکسل در واقع یک مربع کوچک در صفحه را نشان می دهد. فرض کنید ما ۱۰۰۰,۰۰۰ تکرار را انجام دهیم و دریابیم که یک پیکسل خاص ۵۰۰ بار درگیر شده است. این بدان معناست که ۰,۲٪ از نقاط بازدید شده در طی روند تکرار در این پیکسل خاص نهفته است. ما ممکن است ۰,۲٪ را بعنوان یک احتمال به روش زیر تفسیر کنیم. فرض کنید ما یک آزمایش را با استفاده از رایانه خود انجام می دهیم. ما تکرار رایانه را در یک نقطه اولیه شروع می کنیم و سپس در زمان "تصادفی" فرآیند تکرار را متوقف می کنیم و آخرین نقطه بازدید شده را ضبط می کنیم. سپس آن نقطه آخر در داخل پیکسل P با احتمال ۰,۰۰۲ قرار خواهد گرفت. به عنوان مثال فرض کنید که ما همه پیکسل هایی را که ۵۰۰ بار ضربه خورده اند کهربا رنگ می کنیم. اطلاعاتی که این رنگ آمیزی به ما می دهد این است که اگر ما آزمایش را مجدداً انجام دهیم ، به همان اندازه احتمال دارد که آخرین نقطه بازدید شده در هر یک از پیکسل هایی که کهربا رنگ هستند قرار داشته باشد.

یکی از ایده های اساسی پیرامون پویایی آشوب این است که جاذب های عجیب دارای ویژگی های آماری دقیقاً تعریف شده اند. در واقع ، ریاضیدانان نشان داده اند که جاذب های عجیب معمولاً دارای همان آماری هستند که می بینید وقتی بارها و بارها یک سکه عادلانه می ریزید و تعداد شیرها و خطها را می شمارید. به ویژه ، یک دلیل ریاضی خیلی خوب برای رنگ آمیزی تصاویر ما به روشی که داریم وجود دارد. ما در حال اندازه گیری احتمال تقریبی اینکه پیکسل مشخصی تکرار باشد و این اطلاعات را از طریق رنگ ها نمایش می دهد ، نشان می دهیم.

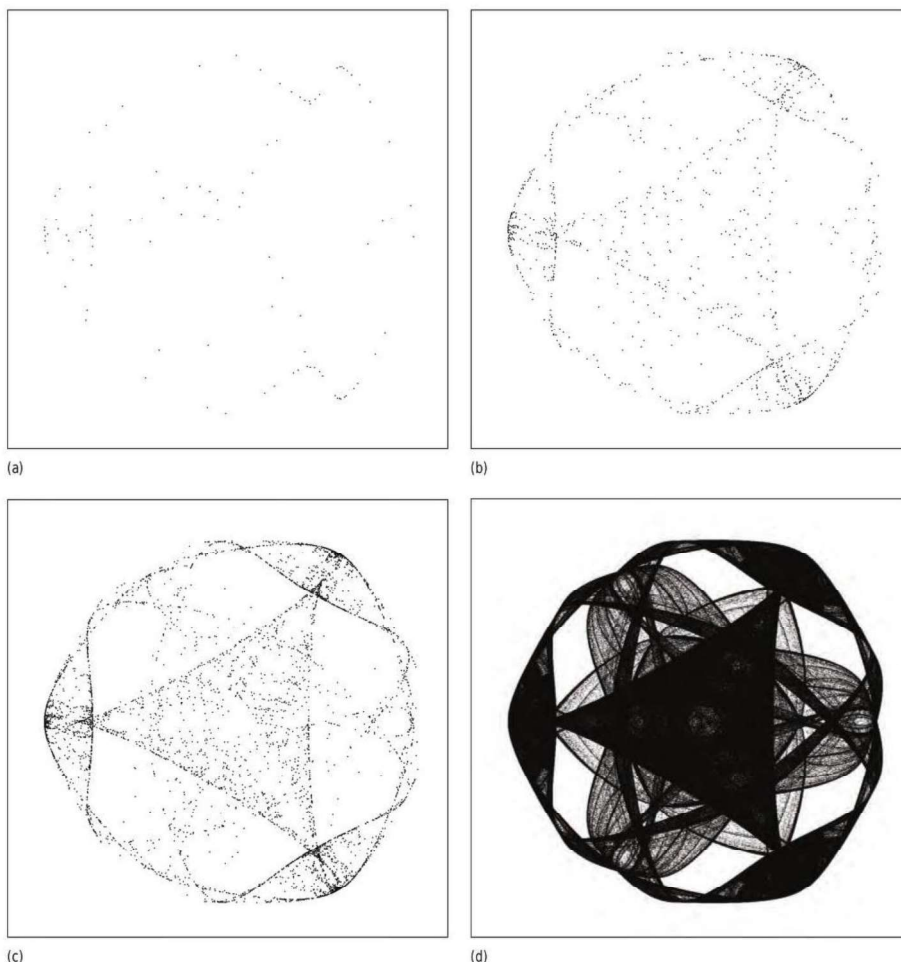
نتیجه این جنبه آماری جاذبهای عجیب این است که می توان انتظار داشت که به طور مستقل از نقطه اولیه ای که انتخاب می کنیم (همان اندازه که در نهایت به سمت آن جذب می شود) همان تصویر (با احتمال بسیار زیاد) را بدست آوریم. ما تصاویر یکسان را بدست می آوریم ، نه به این دلیل که ترتیب بازدید پیکسل ها در جاذبه ها یکسان است (اینگونه نیست) ، بلکه به این دلیل که احتمال اینکه در طول تکرار از هر پیکسل مشخصی در جاذب بازدید کنیم ، مستقل از انتخاب نقطه اولیه است.

تقارن به طور متوسط

در این مرحله ، شایان ذکر است که چگونه ماهیت آماری جاذبه های عجیب و غریب بر خاصیت اصلی عکس هایی که نشان داده ایم تأثیر می گذارد: تقارن آنها. همانطور که دیدیم ، یکی از راه های فهم وجود یک جاذب عجیب میانگین گرفتن است. به جای اینکه به تعداد زیادی از تکرارها نگاه کنیم ، بگذارید در عوض با صرف مقدار کمی از زمان در روند تکرار ، به عکسهایی که بدست می آوریم نگاهی بیندازیم ، یعنی فقط با انجام چند تکرار. در شکل ۱,۱۵ نتیجه انجام تعداد نسبتاً کمی از تکرارها با استفاده از یک قانون با تقارن سه برابر را نشان می دهیم. در شکل ۱,۱۵ (a)، صد تکرار انجام داده ایم. هیچ ساختاری

آشکار نیست و در نگاه اول، توزیع نقاط تا حدودی تصادفی به نظر می‌رسد. در شکل‌های ۱،۱۵ (b-c) به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ تکرار را ثبت کرده ایم. می‌بینیم که با آخرین تصویر تقارن قطعی ظاهر شده است، اگرچه تصویر کاملاً متقارن نیست. در شکل ۱،۱۵ (d) نتیجه ۴۰ میلیون تکرار را نشان می‌دهیم. این رقم اکنون دارای ساختار مشخص و تقارن سه گانه است. سرانجام، ۳۶۰ میلیون تکرار (در یک شبکه ۳۰۰۰ در ۳۰۰۰ پیکسل) انجام می‌دهیم و شکل حاصل را رنگ می‌کنیم (شکل ۱،۱۶). استفاده از رنگ جزئیات ظریف بسیاری را نشان داده است که در شکل ۱،۱۵ (d) مشهود نیستند. رنگ همچنین به ما نشان می‌دهد که در طی روند تکرار کدام یک از نقاط روی جاذبه ضربه می‌خورند، و کدام یک احتمال کمترین ضربه را دارند.

شکل ۱،۱۵ (c) - (a) دنباله ای از ارقام که اثر افزایش تعداد تکرارها را نشان می‌دهد. (d) تصویر سیاه و



سفید با ۴۰ میلیون تکرار.

در واقع، یکی از دلایل کشف آشوب و جاذب های عجیب تا این اواخر این است که، این ساختار ظاهر نمی شود، مگر اینکه نوعی میانگین گیری انجام شود. اگر فقط ۵۰ یا ۱۰۰ بار تکرار را ثبت کرده بودیم و به تصویر نتیجه می رسیدیم، وسوسه می شدیم که نتیجه را فقط به صورت تصادفی رد کنیم. با ظهور و در دسترس بودن رایانه های پر سرعت مدرن، انجام بسیاری از تکرارها و ترسیم نقاط به دست آمده به روش رضایت بخش امکان پذیر شد. در واقع، شایان ذکر است که برای انجام فقط ۱۰۰ تکرار از قانون استفاده شده در این تصاویر، به بیش از ۵۰۰۰ محاسبات حسابی از جمع، تفریق و ضرب نیاز داشت. اگر ما با دست به هفت مکان اعشاری کار کرده بودیم و ۶۰ ثانیه برای ضرب و ۱۰ ثانیه برای جمع یا تفریق مجاز بودیم، مدت زمان در نظر گرفته شده (با فرض عدم خطا) بیش از ۳ روز می بود! و این شامل زمانی نیست که برای ترسیم دقیق این ۱۰۰ عدد لازم است.

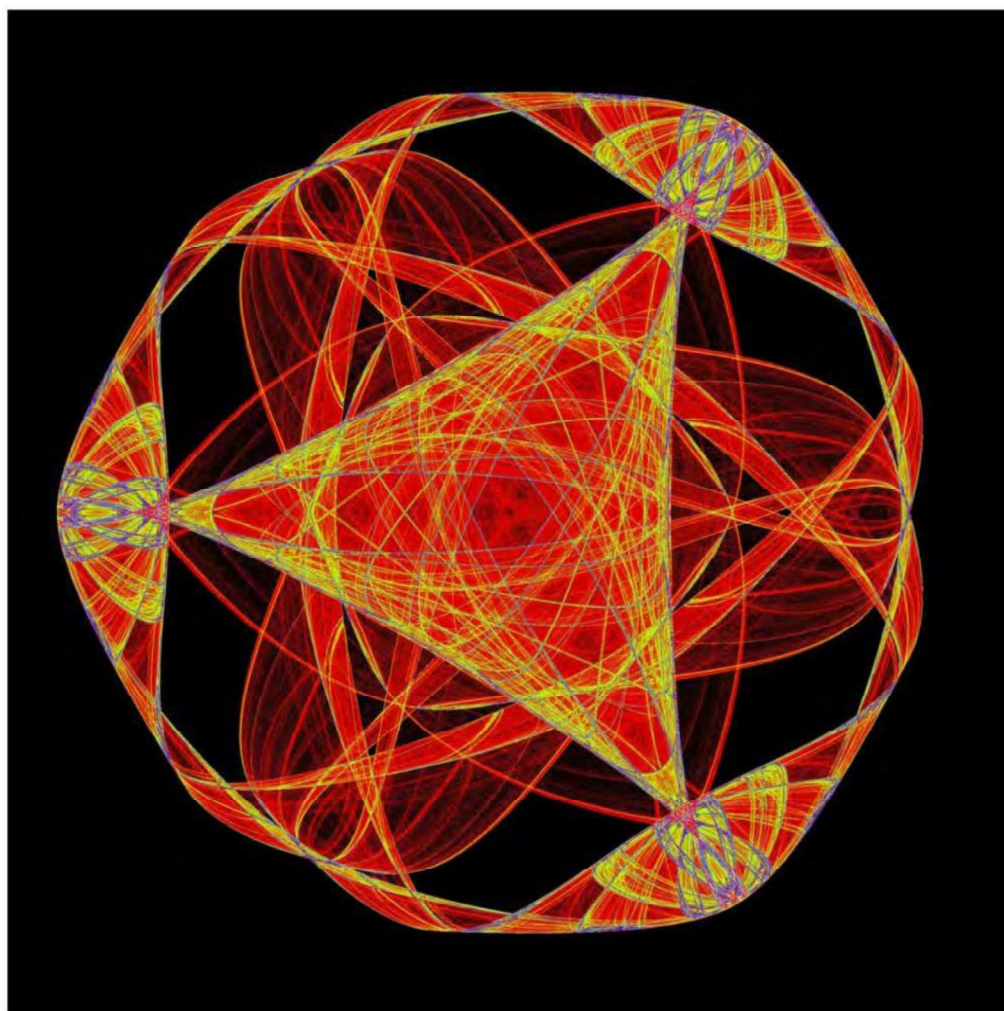
تصاویر و بحث و گفتگو نشان می دهد که اگرچه جاذب تصویر ما متقارن است، اما این تقارن فقط پس از تعداد نسبتاً زیاد تکرار مشاهده می شود. به طور خلاصه، آنچه می بینیم این است که تقارن این جاذب فقط بطور متوسط متقارن است.

چه، چگونه و چرا؟

تاکنون ما وقت خود را صرف تلاش برای توضیح اینکه عکسها کردیم که نشان داده ایم چیست و به طور کلی نحوه ساخت آنها چیست. در فصل های بعدی این کتاب با جزئیات بیشتری به این سؤالات خواهیم پرداخت. به طور خاص فرمول هایی را که ما برای ساخت تصاویر استفاده می کنیم ارائه خواهیم داد و مهمتر از همه نشان می دهد فرمول ها از کجا آمده اند. اکنون زمان خوبی برای صحبت در مورد اهمیت آنها و دلیل جالب بودن آنها به نظر می رسد.

برای به دست آوردن اندازه گیری ها و اهمیت ریاضیات جدید زمان لازم است. این سؤال که آیا تصاویری که ما تولید می کنیم و از همه مهمتر ریاضیات در پشت این تصاویر دارای ماندگاری علمی خواهد بود، موردی است که هنوز به آن پاسخ داده نشده است. ما می خواهیم در اینجا نقاشی کنیم و بنابر برخی از دلایل بیان کنیم که چرا ممکن است این ایده ها جالب و مهم باشند.

ما با مشاهده این نکته را شروع می کنیم که جاذب ایجاد شده توسط قوانین با تقارن نیاز به تقارن ندارند. شکل ۱،۱۷ (a) یک جاذب تنها با تقارن دو طرفه است که توسط یک قاعده دارای تقارن مثلثی تولید می شود. اگر قاعده را کمی تغییر دهیم، در شکل ۱،۱۷ (b) که دارای تقارن مثلثی است، حداقل به طور متوسط، جاذب را می یابیم.



شکل ۱،۱۶ ترامپولین: تصویری رنگی با استفاده از ۳۶۰ میلیون تکرار.

این واقعیت که رفتار طولانی مدت معادلات متقارن نیازی به تقارن ندارد، از دیرباز شناخته شده است که از اهمیت اساسی در فیزیک برخوردار است. کتاب تقارن ترسناک: آیا خدا هندسه دان است؟ توسط استوارت و گلویتسکی زمینه های بسیاری را توصیف می کنند که این مشاهده اهمیت آن را اثبات کرده است. هرکدام از ما هر زمان که برای پیاده روی برویم، نمونه ای از تقارن را با ما به همراه دارد. به حیوان انسانی که در خیابان می رود فکر کنید. با درجه بسیار بالایی از تقریب، ما دو طرفه متقارن هستیم. با این وجود، اگر حرکت ما این تقارن دو جانبه را حفظ کند، ما چه می خواهیم؟ در حقیقت چه تصور می شود اگر همه ما به نظر می رسید که در خیابان در حال پایین رفتن هستیم و هر دو پا را به طور یکنواخت حرکت می دهیم، نه اینکه به طور عادی قدم بزنیم؟ پیاده روی عادی تقارن دو طرفه را می شکند.

به عنوان نمونه دیگر ، در مورد آب جوش فکر کنید. ما می دانیم که وقتی به آن نگاه می کنید آب هرگز جوش نمی آید ، بنابراین به آن نگاه نکنید ، فقط در مورد آن فکر کنید. یک قوری معمولی که در آن آب می جوشانید به صورت دایره ای متقارن است ، اما وقتی آب با جوشیدن شروع به حرکت کرد ، در امواج دایره ای حرکت نمی کند.

مثال سوم: ستاره های دریایی از سلول های کروی متقارن رشد می کنند ، چرا؟ سؤالاتی از این دست وجود دارد ، و مشخص است که وقتی این راه حلها تقارن خود را تغییر دهند ، تغییرات اساسی در حل معادلات رخ می دهد. معمولاً چنین تغییراتی با از دست دادن تقارن ، افزایش الگو و ایجاد دینامیک پیچیده همراه است.

سوالاتی که این تصاویر مطرح می کنند این است که آیا می توان اهمیت زیادی به تقارن جاذب عجیب نشان داد؟ به تعبیری کلی ، جاذب عجیب نشان دهنده رفتار طولانی مدت معادلات هستند ، بنابراین باورپذیر است که تقارن این جذب کنندگان از اهمیت برخوردار باشد. با این وجود ، همانطور که ممکن است تصور شود ، پاسخ این سوال کاملاً پیچیده است. از این گذشته ، حتی تقارن جاذبهای عجیب نیز دقیق نیست: فقط به طور متوسط یک تقارن وجود دارد. بنابراین برای اینکه حتی به این سؤال بپردازیم که آیا تقارن جذب کننده های عجیب از اهمیت برخوردار است ، باید در طبیعت به دنبال نمونه هایی باشیم که تقارن یک حالت فقط به طور متوسط نمایان باشد.

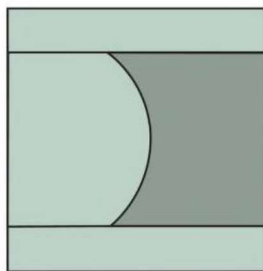
الگوهای و تلاطم

یکی از زمینه هایی که در آن خاصیت میانگین مهم شناخته شده است ، در مکانیک سیالات متلاطم است. برای نشان دادن موضوع ، بگذارید با یک آزمایش فکری شروع کنیم. تصور کنید که در کنار رودخانه در سیل نشسته اید. اگر به سطح رودخانه نگاه کنید ، یک توالی ظاهراً نامربوط از گردابها ، گردابها ، گردابها و سایر پدیده ها را مشاهده خواهید کرد. به نظر می رسد در نگاه اول چیزهای بیشتری برای گفتن وجود دارد به جز اینکه به نظر می رسد وقایع کم و بیش به طور تصادفی رخ می دهند. حال تصور کنید که دوربین خود را می گیرید و در مدت زمان طولانی از همان منطقه رودخانه عکس می گیرید ، هر ثانیه یک عکس بگویید. کیسه اسلایدهای حاصل را بگیرید و تصویر متوسط را تشکیل دهید. شما می توانید تصور کنید که همه اسلایدها را در بالای دیگری قرار داده و یک نور قوی را از طریق ستون حاصل از اسلایدها درخشان کنید. آنچه می بینید تصویر متوسط از تلاطم است.

حدس معقول این است که تصویر یکنواخت نخواهد بود. در واقع ، با انجام این فرایند متوسطی از تصویر ، ممکن است انتظار داشته باشید که ساختار زیربنایی در تلاطم مشاهده شود. به عنوان مثال ، اگر یک سنگ بزرگ در زیر سطح رودخانه یا خم در رودخانه وجود داشته باشد ، ممکن است دلیل عدم یکنواختی در تصویر متوسط باشد. به عبارت دیگر ، حتی اگر حرکت رودخانه ممکن است تصادفی و آشفته به نظر برسد ، هنگامی که شما به طور متوسط با گذشت زمان نگاه کنید ، ساختار اصلی ممکن است ظاهر شود. البته ، این نوع ساختار معمولاً برای ما به طور مستقیم قابل مشاهده نیست ، زیرا وقتی

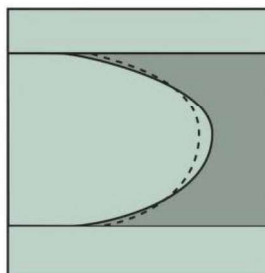
هر چیز را می بینیم ، آنها را در هر لحظه از زمان می بینیم ، و مغز ما معمولاً قادر به تولید تصویری با زمان متوسط نیست.

با هدایت آزمایش فکری ما ، اکنون به مسئله ای می پردازیم که می توانیم از آن با علمی تر بحث کنیم: جریان آب در زیر لوله استوانه ای. آب با فشار به زیر لوله رانده می شود و ما با این فرض شروع می کنیم که فشار و از این رو سرعت جریان ، اندک است. هنگامی که سرعت جریان اندک باشد ، آنچه می بینیم جریان لایه ای نامیده می شود: مولکول های آب در امتداد خطوط به موازات دیواره ها به سمت پایین حرکت می کنند. مولکولهای نزدیک مرکز سریعتر حرکت می کنند ، در حالی که آنهایی که در دیواره لوله قرار دارند ثابت هستند. در شکل ۱،۱۸ ، وابستگی سرعت مولکولهای آب به فاصله آنها از دیواره لوله را نمودار می کنیم.



شکل ۱،۱۸ مشخصات سرعت جریان آرام.

هنگامی که فشار (و از این رو سرعت جریان) زیاد باشد ، توصیف الگوی جریان لوله بسیار دشوارتر می شود و تلاطم نامیده می شود. در سرعت جریان نسبتاً کم ، تکه های تلاطم از زیر لوله عبور می کنند. در فشارهای بالاتر آشفتگی ظاهراً بدون ویژگی دیده می شود. فرض کنید یکی فرایند متوسطی مشابه را با آزمایش انجام شده در آزمایش قبلی انجام دهد. به طور خاص ، می توان سرعت سیال را اندازه گرفت زیرا از یک بخش از لوله عبور می کند و میانگین زمان این سرعت را محاسبه می کند. انتظار داریم در یک بازه زمانی طولانی به طور میانگین در چه زمانی ببینیم؟ پاسخ در شکل ۱،۱۹ آمده است – همانطور که اکنون توضیح می دهیم.



شکل ۱،۱۹ مشخصات سرعت جریان متلاطم.

اگر با سرعت بیشتر، جریان پائین لوله لایه دار بوده باشد، انتظار می رود نمای شکل در شکل ۱،۱۸ کشیده تر شود و این نشان می دهد که مولکول های مرکز لوله سریعتر در حال حرکت هستند. این نمودار فرضی را در شکل ۱،۱۹ با یک خط جامد نمودار می کنیم. نمایه برای جریان متلاطم واقعی با یک خط نقطه چین نشان داده شده است. ما می بینیم که مشخصات سرعت متوسط برای حرکت متلاطم در نزدیکی مرکز صاف است که با مشخصات سرعت جریان لایه ای آرام مقایسه می شود. آنچه این نشان می دهد این است که مایع با سرعت بالاتر در مرکز، به مناطقی که در نزدیکی دیوار قرار دارند، حمله می کند و نشان از وجود تلاطم و از بین رفتن جریان لایه ای دارد. بدون تلاطم، در زمان معینی بیشتر آب از طریق لوله جریان می یابد. اگرچه ما مشکل طراحی لوله ای را که مانع از بروز تلاطم می شود، حل نکردیم، اما می بینیم که فرم دهی به طور متوسط، اطلاعاتی در مورد خواص تلاطم به ما می دهد.

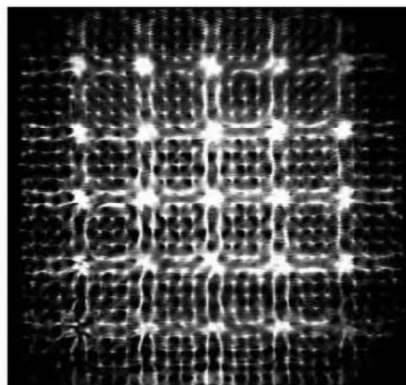
سرانجام، تصور کنید چه اتفاقی می افتد اگر این آزمایش میانگین را برای جریان تلاطم یک لوله با مقطع مربع انجام دهیم. این یک حدس معقول است که ما می خواهیم یک تصویر متوسط با ساختار بسیار زیاد داشته باشیم و این تصویر تقارن مربعی داشته باشد. با این وجود قابل درک است که با سرعت پایین جریان، هنگامی که جریان به تازگی متلاطم شده است، ممکن است تصویری پیدا کنیم که متقارن مربع نبود. در حقیقت، ممکن است وقتی این انتقال فرضی از عدم تقارن به تقارن اتفاق می افتد، اتفاق نسبتاً قابل تاملی رخ دهد. فعلاً، مشخص نیست که آیا جریان متلاطم نامتقارن می تواند در یک لوله مربع رخ دهد، اما یک سوال جذاب است.

آزمایش فارادی

یک فنجان قهوه که روی یک میز در قطار متحرک نشسته است نشان می دهد که امواج می توانند روی سطح یک مایع ارتعاشی شکل بگیرند. این امواج ابتدا برای اولین بار توسط مایکل فارادی در سال ۱۸۳۱ تشریح شد. امواج فارادی همچنین می توانند با قرار دادن یک لایه مایع در یک ظرف با یک مقطع مربع در مرکز یک بلندگو در یک آزمایش کنترل شده شکل گرفته و سپس آن لایه مایع را ارتعاش دهید. دامن و فرکانس لرزش را می توان با تغییر حجم و یادداشت تولید شده توسط بلندگو کنترل کرد. در دامن های کم (حجم کم)، سطح سیال صاف است. با افزایش حجم، سطح صاف ثبات را از دست می دهد، سطح سیال تغییر شکل می یابد و امواج ظاهر می شوند. برای این بحث ذکر این نکته حائز اهمیت است که این شکل از آزمایش فارادی دارای تقارن مقطع ظرف، یعنی هشت تقارن در یک مربع است.

در شکل ۱،۲۰ داده های مربوط به آزمایش فارادی را که توسط بروس گلاکمن و همکارانش در آزمایشگاه جری گولوب در کالج هاورفورد انجام شده است نشان می دهیم. در این آزمایشات، تغییر شکل سطح سیال از طریق تصاویر سایه نگاری شده دیده می شود. این تصاویر یک تصویر واضح از الگوهای متقارن منظم را ارائه می دهند که می تواند ناشی از آزمایشات با تقارن باشد. تصاویر با ضبط از طریق دوربین فیلمبرداری، شدت نور منتقل شده از قسمت انتهایی ظرف که به سطح بالا منعکس شده شکل می گیرد. این ترتیب این اثر را دارد که تصویر فقط در جائیکه سطح سیال تقریباً مسطح باشد،

روشن باشد. نمودار سایه در شکل ۱,۲۰ در دامنه لرزش دقیقاً فراتر از نقطه ای که سطح صاف پایداری را از دست می دهد گرفته شده و امواج ظاهر می شوند.

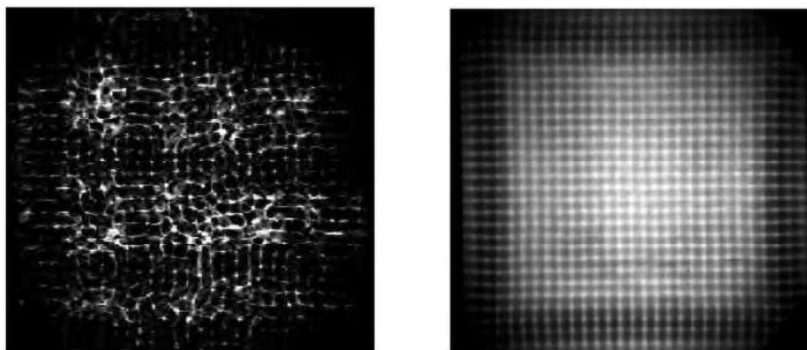


شکل ۱,۲۰ سایه نگاری موج فارادی در نزدیکی انتقال به الگوی متقارن مربع. با تقدیر از J.P. Gollub.

اکنون به پاراگرافهای قبلی برمی گردیم و در مورد اهمیت تقارن با توجه به آزمایش فارادی بحث می کنیم. برای انجام این کار ، باید بین تقارن یک جاذبه در فضای فاز برای مدل ریاضی آزمایش و نحوه نمایش تقارن در فضای فیزیکی ارتباط برقرار کنیم. یک نتیجه ریاضی قدرتمند به نام قضیه ارگودیک به ما می گوید اگر جاذب در فضای فاز تقارن داشته باشد ، آنگاه میانگین زمان نتیجه در فضای فیزیکی نیز این تقارن را خواهد داشت. بنابراین ، اگر جاذب مدل معادله دیفرانسیل از آزمایش فارادی دارای تقارن مربع باشد ، در این صورت میانگین زمانی نمودارهای سایه بدست آمده در فضای فیزیکی نیز متقارن خواهد بود. میانگین زمانی نمودارهای سایه چگونه تشکیل می شود؟ آزمایش ها برای مدت زمان طولانی اجرا می شوند ، تصاویر سایه ای بدست آمده دیجیتالی می شوند (دوباره پیکسل ها) ، و شدت نور منتقل شده در هر پیکسل به طور متوسط بدست می آید. روند میانگین گیری دقیقاً همان چیزی است که در بحث قبلی ما درباره تلاطم پیشنهاد کردیم. به طور متوسط ، می توان میانگین را فقط با جمع کردن نمودارهای سایه یکی در بالای دیگری بدست آورد.

مفاهیم پیشنهادی توسط شبیه سازی های رایانه ای ما از جذابیت های متقارن این است که میانگین زمان نمودارهای سایه احتمالاً تقارن مربعی خواهد داشت. این پیش بینی در آزمایش فارادی گلکمان و همکاران تأیید شد. تصویر نمودار سایه نشان داده شده در شکل ۱,۲۱ (سمت چپ) وقتی دامنه ارتعاشات بزرگ بود بدست آمد. اگرچه موج بسیاری از ساختارهای سلولی مانند را تشکیل می دهد ، عدم وجود یک الگوی منظم و عدم وجود تقارن کاملاً مشخص است. در واقع ، فیلمی از این آزمایش نشان می دهد که ساختارهای سلولی به شکلی پیچیده و تصادفی به حرکت در می آیند ، و نشان می دهد که پویایی این امواج فارادی آشوبگون است. در شکل ۱,۲۱ (سمت راست) ، میانگین زمان شدت نور منتقل شده نشان

داده شده است. طبق نظریه، الگوی متقارن منظم را مشاهده کنید که در میانگین زمان دوباره ظاهر شده است.



شکل ۱،۲۱ یک نمودار سایه نمونه به دست آمده در آزمایش فارادی در لرزش دامنه زیاد (سمت چپ) و میانگین زمان نمودارهای سایه در آن آزمایش (سمت راست). با تشکر از J.P. Gollub

آزمایش فارادی نشان می دهد که دو نوع تقارن در جاذب وجود دارد، هر کدام تفسیر بدنی خاص خود را دارند: آن دسته از تقارنهایی که یک جاذب را به صورت نقطه ای ثابت می کنند و از این رو یک الگوی مربوطه را در یک فضای فیزیکی در یک لحظه واحد ثابت می کنند (تقارن های آنی)، همانطور که در شکل ۱،۲۰، و آن تقارنهایی که یک جاذب را به صورت منظم تثبیت می کنند و از این رو الگویی را در فضای فیزیکی فقط به طور متوسط (تقارن متوسط) برطرف می کنند، همانطور که در شکل ۱،۲۱ (درست) مشاهده می شود.

برخی گمانه زنی های بیشتر

در بحث تلاطم، آزمایش های فکری راجع به جریان سیال در یک رودخانه یا یک لوله مربع ایجاد کردیم که در آن الگوهای و تقارن به طور متوسط ممکن است شناسایی شود. ما یک آزمایش دینامیک سیال واقعی را توصیف کرده ایم که در آن الگویی در یک جریان آشفته وجود دارد، حداقل به طور متوسط. بنابراین، به نظر می رسد این سؤال منصفانه باشد که: از کجا می توانیم تأثیر تقارن را به طور متوسط در دنیای واقعی ببینیم؟ برای پرداختن به این نکته، ما یک آزمایش فکری دیگر را ارائه می دهیم. یک ظرف مستطیل شکل دو بعدی را تصور کنید که یک مخلوط مایع از چندین ماده شیمیایی را در خود نگه می دارد که یکی از آنها اسید است. تصور کنید که مخلوط مایع در حال حرکت باشد، در واقع در حرکات آشوب پیچیده است. سرانجام، تصور کنید که اسید می تواند ته این ظرف را بخورد یا اچ کند. در این شرایط منطقی است که فرض کنیم میزان اچ در امتداد کف ظرف متناسب با غلظت اسید باشد. البته، انتظار می رود که این غلظت هم در پایین ظرف و هم در زمان متغیر باشد و الگویی اچ کردن ایجاد شده با گذشت زمان می تواند بسیار پیچیده باشد.

در آزمایش فکری که مطرح کرده ایم ، یک تقارن غیرمستقیم وجود دارد. ظرف را می توان به چپ و راست منعکس کرد بدون اینکه هیچ تغییری در توضیحات آن ایجاد شود. با در نظر گرفتن این تقارن ، این سؤال را مطرح می کنیم: فرض کنید مایع برای مدت طولانی در گردش باشد ، آیا الگوی اچ کردن در امتداد کف ظرف ، متقارن چپ یا راست خواهد بود؟ ما انتظار داریم که بسته به سیستم خاصی که مورد مطالعه است ، هر دو پاسخ ممکن ، بله و خیر رخ دهند. علاوه بر این ، انتظار داریم مقادیر پارامتر بحرانی سیستم وجود داشته باشد که در آن الگوی میانگین قلع زدن به طور ناگهانی از غیر متقارن بودن به طور میانگین متقارن شود و در صورت تغییر این پارامترها بطور متوسط متقارن شود.

این مهم است که درک کنیم که ما نمی گوییم که دینامیک مشخصات غلظت اسید در امتداد کف در هر نقطه از زمان متقارن خواهد بود. آنچه ما می گوییم این است که اگر کسی این غلظت را به مرور زمان در طی یک دوره نسبتاً طولانی به طور متوسط انجام دهد ، آنگاه آنچه در بعضی از سیستم ها مشاهده می شود ، غلظت متوسط با الگوی متمایز متقارن چپ و راست است ، حتی اگر غلظت در زمان به صورت آشوبگونه تغییر کند. به این معنا ، الگو فقط در حالت متوسط ظاهر می شود.

انجام یک مطالعه دقیق در مورد این نوع حرکت سیال ، با واکنش شیمیایی مرتبط با آن ، یک کار بسیار پیچیده است. به جای اینکه بلافاصله به چنین پروژه پیچیده ای بپردازیم ، معقول است که ابتدا مشکلات ساده تر را مورد بررسی قرار دهیم تا ببینیم آیا پدیده تقارن و الگوی بطور متوسط وجود دارد یا خیر. ساده ترین مدل ممکن از چنین آزمایشی می تواند یکی از مواردی باشد که فقط غلظت اسید را در انتهای ظرف نگه می دارد. معادلات از این دست به معادلات دیفرانسیل جزئی گفته می شود و تکامل کمیتی مانند غلظت در هر دو مکان و زمان را توصیف می کند. مشکلی که در این نوع ساده سازی وجود دارد این است که نوشتن معادله ای که به هر طریقی می تواند تقریبی باشد ، دشوار است.

روش دیگر فقط انتخاب یک معادله دیفرانسیل جزئی است که برای پردازش یک فرایند شیمیایی و حل آن به صورت عددی ، محاسبه میانگین زمان و مشاهده اینکه میانگین زمان متقارن است یا خیر شناخته شده است. این کار اخیراً برای معادله ای از مدل به نام Brusel ator انجام شده است. (توسط گروهی از شیمی دانان در بروکسل نوشته شده است ؛ همچنین یک مدل پیچیده تر به نام Oregonator وجود دارد که توسط گروهی در اورگان نوشته شده است.) این آزمایش عددی توسط مایکل دلنیتز (دانشگاه پادربورن) انجام شده است. آنچه پیدا شد انتقال از میانگین زمان نامتقارن به یک میانگین متقارن به عنوان یک پارامتر تغییر یافته است. در آزمایش فکری ما ، این پارامتر با طول قسمت پایین ظرف مطابقت دارد.

این نوع آزمایش عددی به ما امکان می دهد باور داشته باشیم که پدیده الگوهای متقارن به طور متوسط واقعی است. اکنون می توانیم این سؤال را بپرسیم که آیا پدیده های دیگر که الگوهای مشخص (تقریباً) متمایز در آنها ظاهر می شود ، محصول رشد آشوبناک به طور متوسط برای شکل دادن یک الگوی منظم است.

فصل دوم

تقارن سطحی

